Fonction exponentielle

Gabriel ROMON

Version du 2020-07-11 à 14:14:31

Une construction de l'exponentielle

1. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [1, \infty[$, $(1+x)^n \geq (1+nx)$.
   C'est l'inégalité de Bernoulli.

   (a) Vérifier que l'inégalité est vrai quand $n = 0$.

   (b) Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ la proposition
   $P(n)$: pour tout $x \in [-1, \infty[$, $(1+x)^n \geq (1+nx)$

2. Soit x un nombre réel fixé dans toute cette section. Soit N le plus petit entier strictement supérieur à $|x|$. Pour $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq N$ on définit la suite $(u_n)_{n \geq N}$ par

$$u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

   (a) Constater que si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n \geq N$, alors $n > |x|$.

   (b) Montrer que si $n \geq N$, alors $0 < 1 + \frac{x}{n}$.

   (c) Avec (b), déduire que v_n est bien définie.

   (d) Vérifier que pour tout $n \geq N$,

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)^{n+1}$$

   (e) Avec (b), vérifier que pour tout $n \geq N$,

$$-\frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)} \geq -1 \iff \frac{x}{n(n+1)} \leq 1 + \frac{x}{n}$$

   (f) Vérifier que pour tout $n \geq N$, $\frac{x}{n(n+1)} \leq 1 + \frac{x}{n} \iff -x \leq n+1$

   (g) Montrer que pour tout $n \geq N$, $-x \leq n+1$ et en déduire que $-\frac{x}{n(n+1)\left(1+\frac{x}{n}\right)} \geq -1$.

   (h) Montrer avec l'inégalté de Bernoulli que pour tout $n \geq N$,

$$\left(1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)^{n+1} \geq 1 - \frac{x}{n\left(1 + \frac{x}{n}\right)}$$

   (i) Montrer que $1 - \dfrac{x}{n\left(1 + \frac{x}{n}\right)} = \dfrac{1}{1 + \frac{x}{n}}$.

   (j) Avec (b) et (d) en déduire que pour tout $n \geq N$,

$$u_{n+1} \geq u_n$$

   On définit la suite $(v_n)_{n \geq N}$ par

$$v_n = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}$$

   (k) Montrer que si $n \geq N$, alors $0 < 1 - \frac{x}{n}$. Déduire que v_n est bien définie.

(l) En remplaçant x par $-x$ dans la définition de $(u_n)_{n\geq N}$, déduire que pour tout $n \geq N$,

$$v_{n+1} \leq v_n$$

(m) Montrer que $\dfrac{u_n}{v_n} = \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)^n$.

(n) Avec l'inégalité de Bernoulli, montrer que pour tout $n \geq N$,

$$1 - \frac{x^2}{n} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1$$

(o) En déduire que pour tout $n \geq N$,

$$0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_N x^2}{n}$$

(p) En déduire que $(u_n)_{n\geq N}$ et $(v_n)_{n\geq N}$ sont adjacentes, et donc convergentes.

On note $f(x) = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$. Ceci définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3. On étudie dans cette section la dérivabilité de f. On considère x un réel fixé et N le plus petit entier strictement supérieur à $|x|$. Soit h un réel tel que $|h| \leq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq N + 1$ on définit les suites $(u_n)_{n\geq N}$ et $(w_n)_{n\geq N+1}$ par

$$u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad w_n = \left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n$$

(a) Constater que si $n \geq N + 1$, alors $n > |x| + 1$. En déduire que si $n \geq N + 1$, alors $0 < 1 + \frac{x}{n}$.

(b) Vérifier que pour tout $n \geq N + 1$,

$$w_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{h}{n\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)^n$$

(c) En utilisant les inégalités de (a), montrer que $\frac{h}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)} \geq -1 \iff x - h \leq n$.

(d) Utiliser les propriétés de la valeur absolue pour montrer que $x - h \leq |x| + |h| \leq n$. En déduire que $\frac{h}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)} \geq -1$.

(e) Avec l'inégalité de Bernoulli, déduire que pour tout $n \geq N + 1$,

$$w_n \geq u_n \left(1 + \frac{h}{n\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)$$

(f) En appliquant le résultat final de la section 2, constater que $\lim_{n\to\infty} w_n = f(x + h)$ et $\lim_{n\to\infty} u_n = f(x)$.

(g) En utilisant (e) en déduire que $f(x + h) \geq f(x)(1 + h)$.

(h) En changeant $h \leftarrow -h$ et $x \leftarrow x + h$ dans (g) montrer que $f(x) \geq f(x + h)(1 - h)$.

(i) Déduire de (g) et (h) que si $h > 0$,

$$f(x) \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x)}{1-h}$$

et que si $h < 0$,

$$\frac{f(x)}{1-h} \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq f(x)$$

(j) Faire varier h et utiliser le théorème des gendarmes pour montrer que f est dérivable en x, avec $f'(x) = f(x)$.

4. La fonction f est donc dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$, avec $f'(x) = f(x)$. Montrons quelques propriétés de f.

   (a) Vérifier que $f(0) = 1$.

   (b) Poser $g : x \mapsto f(x)f(-x)$. Calculer g' et en déduire que g est constante, égale à 1.

   (c) Déduire de (b) que f ne s'annule jamais et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

   (d) Soit y un réel fixé et poser $h : x \mapsto f(x+y)f(-x)$. Calculer h' et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)f(y)$. En déduire que

$$\text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y)$$

   (e) Déduire de (d) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left[f(\frac{x}{2})\right]^2$. Déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

   (f) Déduire de (e) que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Equation différentielle à paramètre

Soit a, b des réels fixés. On cherche toutes les fonctions f dérivables qui vérifient

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = af(x) \\ f(0) = b \end{cases}$$

1. On suppose dans cette section que $b = 0$.

   (a) Vérifier que la fonction nulle est solution du système.

   (b) Soit f une solution du système. Poser $g : x \mapsto e^{-ax}f(x)$. Calculer g' et en déduire que f est nulle.

   (c) Conclure sur les solutions du système.

2. On suppose maintenant que $b \neq 0$ et on considère f une solution du système.

   (a) Poser $h : x \mapsto \frac{1}{b}f(\frac{x}{a})$ et calculer h' et $h(0)$.

   (b) Utiliser un résultat du cours pour en déduire que $h = \exp$.

   (c) Déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = be^{ax}$.

   (d) Vérifier que la fonction $x \mapsto be^{ax}$ est solution du système.

   (e) Conclure.