Suites

Gabriel ROMON

Version du 2020-07-11 à 14:13:03

Preuves par récurrence

Exercice 1

Exo 1S1 2010

Montrer par récurrence les propositions suivantes

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $2^n > n^2$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 2

Exo 1S1 2010

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1 - n$

1. Lorsque $u_0 = 0$, conjecturer une formule explicite pour u_n et la démontrer
2. Lorsque $u_0 = 1$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + n$
3. Lorsque $u_0 = 6$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^{n+1} + n$

Suites

Exercice 3

DS5 1S1 2001

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$. On définit $(v_n)_{n\geq 0}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie.
2. Montrer que (v_n) est bien définie.
3. Montrer que (v_n) est géométrique.
4. Donner une forme explicite de (v_n) et (u_n)

Exercice 4

DS5 1S1 année inconnue

Trouver a, b, c des réels ≥ 0 tels que

$$\begin{cases} 0 \leq a \leq b \leq c \\ a, b, c \text{ sont 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique} \\ a^2, 3b, c^2 \text{ sont 3 termes consécutifs d'une suite géométrique} \\ a + b + c = 12 \end{cases}$$

Limites de suites

Exercice 5

Terracher

Calculer la limite des suites suivantes:

1. $\dfrac{5 \times 3^n - 2}{3^n + 1}$
2. $\dfrac{1 - 2^n}{2^{n+1} + 1}$
3. $n^2 + (-1)^n n$
4. $\sin(n) - n$
5. $3^n + (-2)^n$
6. $3n^2 - n + 1$
7. $2^n \times \dfrac{1}{n3^n}$

Exercice 6

Exo 1S1 2010

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite de terme général $u_n = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

1. Quelle est la limite de (u_n) ?
2. Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que (v_n) est géométrique, donner sa raison et son premier terme.

Exercice 7

Terracher
En utilisant une suite géométrique montrer que $0.555\ldots = \frac{5}{9}$

Exercice 8

Terracher
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$

1. Montrer que $\dfrac{n}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$.
2. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 9

DS6 1S1 2001
Soit a un réel strictement positif et différent de 2.
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{au_n+2}{2u_n+a}$.
On définit $(v_n)_{n\geq 0}$ par $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1}$.

1. Vérifier que (u_n) et (v_n) sont bien définies.
2. Calculer une forme explicite de (u_n) et (v_n).
3. Etudier la convergence de (u_n) et (v_n).

Exercice 10

DS6 1S1 année inconnue
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n + u_{n+1} \leq 2u_n \leq u_{n-1} + u_n$
2. En déduire que si la suite de terme général $n(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 1, alors la suite de terme général nu_n converge vers $\frac{1}{2}$
3. En déduire la convergence de (u_n).

Exercice 11

DS7 1S1 2004

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner une preuve ou un contre-example.

1. Si la suite (u_n) est non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
2. Si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.
3. Si (u_n) est croissante, alors elle diverge vers $+\infty$.
4. Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors elle est croissante à partir d'un certain rang.
5. Si (u_n) converge, alors $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0.
6. Si $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0 alors (u_n) converge.
7. Si (u_n) converge, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent.
8. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent alors (u_n) converge.
9. Si (u_n) converge, alors $(|u_n|)$ converge.
10. Si $(|u_n|)$ converge, alors (u_n) converge.