Trigonométrie

Gabriel ROMON

Version du 2020-07-11 à 14:12:53

1 Définition

Le sinus noté sin et le cosinus noté cos sont des **fonctions** $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont les définitions formelles sont trop compliquées pour être comprises en 1S.

A titre indicatif, on peut définir sin comme la somme de la série entière $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, ou différemment comme la solution de l'équation différentielle $\begin{cases} f''(x) + f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$.

De façon similaire, cos est la somme de la série entière $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, ou est la solution de l'équation différentielle $\begin{cases} f''(x) + f(x) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

2 Propriétés

1. cos et sin sont 2π-périodiques, c'est-à-dire: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
2. Les valeurs usuelles de cos et sin sont données sur le cercle trigonométrique

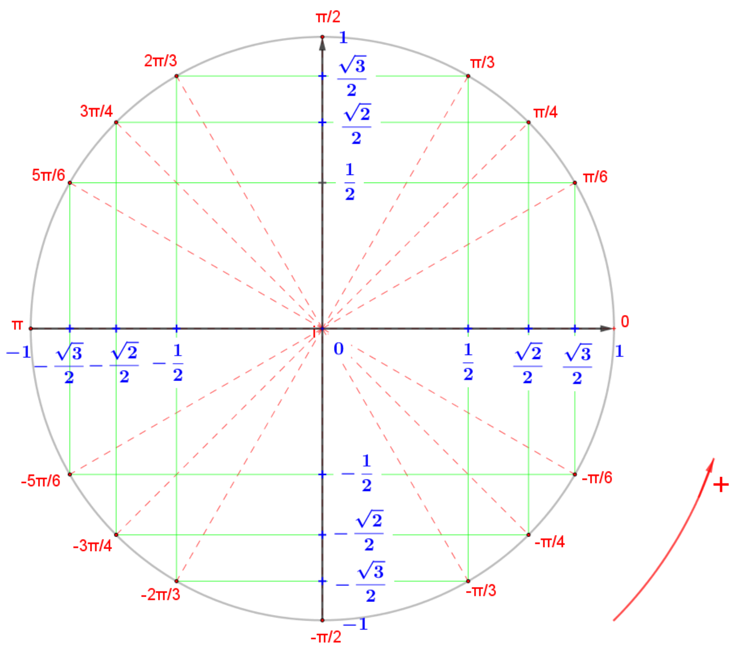

Figure 1: Cercle trigonométrique

3. cos est paire et sin est impaire, c'est-à-dire: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$

4. On a les équivalences

$$\begin{aligned} \cos(x) = 0 &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin(x) = 0 &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi \end{aligned}$$

5. cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(\frac{\pi}{2} - x) &= \sin(x) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - x) &= \cos(x) \\ \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) \end{aligned}$$

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= 2\cos^2(x) - 1 \\ \sin(2x) &= 2\cos(x)\sin(x) \end{aligned}$$

9. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{aligned}$$

10. Pour tout $p, q \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(p) + \cos(q) &= 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}) \\ \sin(p) + \sin(q) &= 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}) \end{aligned}$$

11. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ \sin(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \end{aligned}$$