

# VALEUR ABSOLUE

Gabriel ROMON

Version du 21 juillet 2020 à 18 h 37

## Définition

La valeur absolue est une **fonction** définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\text{abs} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Au lieu d'écrire  $\text{abs}(x)$ , on écrit habituellement  $|x|$ .

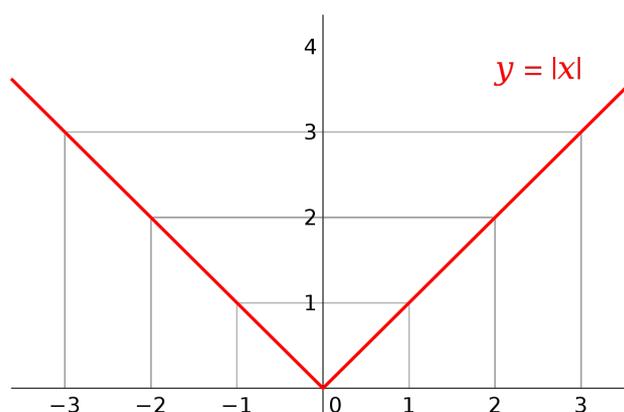


FIGURE 1 – Graphe de la fonction abs

## Propriétés

Montrer les propriétés suivantes

1. La fonction abs est paire, i.e. pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|-x| = |x|$ .
2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $||x|| = |x|$ .
3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-|x| \leq x \leq |x|$ .
4. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{x^2} = |x|$ .
5. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x|^2 = x^2$ .
6. Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|xy| = |x| \cdot |y|$ .
7. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $|x| \leq a$  si et seulement si  $-a \leq x \leq a$ .
8. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $|x| \geq a$  si et seulement si  $(x \geq a$  ou  $x \leq -a)$ .
9. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $|x| = a$  si et seulement si  $(x = a$  ou  $x = -a)$ .
10. Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (inégalité triangulaire).
11. Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $||x| - |y|| \leq |x - y|$  (inégalité triangulaire renversée).

## Exercices

### Exercice 1

Résoudre les équations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $|x| = x$
2.  $|x - 4| = 3/2$
3.  $|x + 5| = 3$
4.  $|x - 9| = 3 - \pi$
5.  $|2x + 1| = 5$
6.  $|3 - x^2| = 0$
7.  $|4 - 2x| = -8$
8.  $|x^2 - 4| = 4 - x^2$
9.  $|2x + 1| = |x - 5|$
10.  $|x^2 + 2| = |x^2 + 4x|$
11.  $|2 - 3x^2 + x| = |x^2 - 1|$

### Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $|x + 3| < 5$
2.  $|10 - 2x| \geq 3$
3.  $|3x - 8| \geq 4$

### Exercice 3

Résoudre l'inéquation  $|x + 2| < |x - 4|$  sur  $\mathbb{R}$  de deux manières :

1. en passant au carré (justifier pourquoi c'est licite)
2. en faisant une disjonction de cas

### Exercice 4

Démontrer les assertions suivantes :

1. Pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a :  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$
2. Pour tout réel  $x$ , on a :  $\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} \geq 2|x|$

### Exercice 5

Tracer le graphe des fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto |x - 1|$
2.  $x \mapsto |x - 1| + |2x - 5|$
3.  $x \mapsto |x + 4| + |3x - 1| + |x - 5|$
4.  $x \mapsto |x^2 - x - 6|$

### Exercice 6

Montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ,  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$

### Exercice 7

Montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$

### Exercice 8

Montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$  et  $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$

### Exercice 9

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ .

1. Montrer que sur  $[-3, 1]$ ,  $|f(x)|$  admet un maximum que l'on déterminera
2. Résoudre sur  $\mathbb{R}$ ,  $|f(x)| > 3$

### Exercice 10

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \left| |2x^2 + x - 3| - (2x^2 + x + 1) \right|$

1. Montrer que pour tout  $x$ , on a :  $0 \leq f(x) \leq 4$
2. Déterminer l'ensemble des réels pour lesquels  $f(x) = 4$
3. En déduire que  $f$  a un maximum que l'on précisera et indiquer l'ensemble des réels pour lesquels ce maximum est atteint.
4. Résoudre  $f(x) = 0$

### Exercice 11

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = |x + 1| - |-x + 2| + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ .  
Discuter suivant les valeurs de  $m$  du nombre de solutions de l'équation de  $f(x) = m$ .

### Exercice 12

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $\frac{3}{x^2} - \frac{1}{|x|} - 2 = 0$
2.  $\frac{3}{x^2} - \frac{1}{|x|} - 2 \leq 0$